

Первая Арктическая олимпиада по математике.

Решения I тура.

6 класс.

Задача 1. Периметр квадрата равен 16 сантиметрам. Из 16 таких квадратов сложили большой квадрат. Чему равен периметр полученного квадрата?

Ответ: 64.

Решение. Каждая сторона большого квадрата состоит из 4 сторон маленького квадрата, значит она равна 16. Тогда периметр большого квадрата равен $16 \times 4 = 64$.

Задача 2. В трех корзинах лежало 27 яблок. Когда из первой корзины переложили во вторую 5 яблок, а из второй в третью 3 яблока, то во всех корзинах яблок стало поровну. Сколько в каждой корзине было яблок изначально?

Ответ: 14, 7, 6.

Решение. Будем решать задачу «с конца». В конце во всех трех корзинках яблок было поровну, а суммарно в них лежат 27 яблок. Значит в каждой лежит по 9. Значит до перекладывания 3 яблок из второй в третью в первой было 9, во второй 12, в третьей 6. А до перекладывания 5 яблок из первой во вторую количество яблок в корзинах было равно: 14, 7, 6.

Задача 3. По кругу выписаны целые числа от 1 до 30. Петя может соединить отрезком два числа, если их сумма четное число. Какое наибольшее количество отрезков он может провести?

Ответ: 210.

Решение. Чтобы сумма двух целых чисел была четной, нужно чтобы они были одной четности. Заметим, что среди целых чисел от 1 до 30 ровно 15 нечетных и 15 четных. Значит отрезками соединены между собой все нечетные числа, а также все четные числа. Количество отрезков с нечетными концами равно $14 + 13 + \dots + 1 = \frac{15 \times 14}{2} = 105$ (соединяем 1 с 3, 5, ..., 29 (15 отрезков), соединяем 3 с 5, 7, ..., 29 (14 отрезков) и так далее). Аналогично посчитаем количество отрезков с четными концами – их тоже 105. Значит всего отрезков 210.

Задача 4. В чемпионате по футболу участвовало 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Сумма очков, набранных всеми командами равна 300. Сколько матчей закончилось вничью? (В футболе за победу дается 3 очка, за поражение 0 - очков и за ничью – одно очко).

Ответ: 60.

Решение. Посчитаем количество сыгранных матчей. Команда 1 играла с 2, 3, 4, ..., 16 (15 матчей). Команда 2 играла с 3, 4, 5, ..., 16 (14 матчей). И так далее. Всего игр было $15 + 14 + \dots + 1 = 120$. Если бы все игры закончились победой, то суммарное количество очков равнялось бы $120 \times 3 = 360$. Каждая ничья дает суммарно двум командам 2 очка. Каждый ничейный матч уменьшает максимальную сумму 360 на 1. Значит количество ничей равно $360 - 300 = 60$.

Задача 5. Алла подарила своему другу Диме попугая, который не знает ни одного слова. Каждый день попугай узнает от Димы 10 новых слов, но за ночь забывает не менее половины слов из своего словарного запаса. Какое наибольшее количество слов может запомнить попугай при таком обучении?

Ответ: 19.

Решение. Посмотрим сколько слов будет знать попугай.

$0 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 18 \rightarrow 9 \rightarrow 19 \rightarrow 9 \rightarrow 19 \rightarrow \dots$

Заметим, что в какой-то момент будет повторяться кусок $9 \rightarrow 19$. Значит больше 19 слов попугай не выучит.

Задача 6. В предвыборных дебатах участвовал 21 кандидат. Известно, что любой из кандидатов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Каждый из них вышел на трибуну и сказал, обращаясь к остальным кандидатам: "Каждый из вас - лжец!". Сколько кандидатов сказали правду?

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что если есть 2 кандидата, который говорят всегда правду, то сказав фразу "Каждый из вас - лжец!", они оба солгали бы. Если нет кандидатов, который всегда говорят правду, значит все лгут, но тогда каждый из них сказал бы правду. Таким образом в дебатах участвовал только один кандидат, который говорит правду.

Задача 7. "Найдите решение ребуса $YUYU \times Z = ZXYZ + ZYX$. (В ребусе одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные). В ответе укажите наименьшую возможную сумму $X + Y + Z$.

Ответ: 3.

Решение. Заметим, что сумма $X + Y + Z$ не меньше 3, так как X, Y, Z – разные цифры (0, 1, 2). Приведем пример, когда сумма равна 3 и выполняется условие ребуса. $X = 0, Y = 1, Z = 2$. $1111 \times 2 = 2012 + 210$.

Задача 8. У Пети огород площадью 2 сотки. Петя может собрать урожай в огороде в два раза быстрее, чем любой из трех его друзей. На это Пете понадобится 2 часа. За сколько минут Петя сможет собрать урожай, если он будет это делать вместе со своими друзьями? (сотка – это мера площади, равная 100 квадратным метрам).

Ответ: 48.

Решение. Если бы таких огородов было 5, то вчетвером они бы все огороды убрали за 4 часа (2 огорода убрал бы Петя и 3 его друзья). А так как работы в 5 раз меньше, то и времени потребуется в 5 раз меньше, то есть $\frac{4}{5}$ часов или 48 минут.

Задача 9. В диктанте по русскому языку участвовало 50 школьников. Известно, что любые 4 школьника в сумме допустили не менее 9 ошибок. Какое наименьшее суммарное количество ошибок могли допустить все участники диктанта?

Ответ: 147.

Решение. Заметим, что в любой четверке кто-то совершил хотя бы 3 ошибки (иначе у всех не больше 2, значит у четверых не более 8 ошибок). Если количество людей совершивших по крайней мере 3 ошибки меньше 46, то мы бы смогли найти 4 человека, у которых не более двух ошибок, но их суммарное количество ошибок было бы тогда не больше 8. Значит у нас есть 46 человек, у которых по крайней мере 3 ошибки, а у остальных суммарно не менее 9 ошибок. Значит количество ошибок не меньше $3 \times 46 + 9 = 147$. Такое могло случиться. Если 47 человек совершили ровно 3 ошибки, а 3 человека ровно по 2 ошибки.

Задача 10. Из бумаги размером 30×40 нужно вырезать серый прямоугольник 5×10 со сторонами, параллельными сторонам бумаги (расположение прямоугольника указано на рисунке). Разрешается сделать четыре прямолинейных разреза, каждый от одного края листа до другого. После каждого разреза, часть, не содержащая серый прямоугольник, выбрасывается. Необходимо сделать разрезы так, чтобы суммарная длина разрезов была минимальна. Найдите эту длину.

Ответ: 65.

Решение. Сделаем сначала красный разрез, потом зеленый, потом голубой, а в конце желтый. Тогда суммарная длина разрезов в точности равна 65.

